Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 9

Transfert d'énergie par conduction thermique

I. Notion de flux thermique . . . 1
I.1. Loi de Fourier . . . 1
I.2. Flux thermique . . . 2
I.3. Conductivité thermique . . . 2
II. Diffusion thermique . . . 3
II.1. Équation de la diffusion thermique . . . 3
II.2. Longueur et temps caractéristiques de la diffusion thermique . . . 4
II.3. Irréversibilité de la diffusion thermique . . . 4
III. Cas particulier du régime stationnaire . . . 5
III.1. Loi d'Ohm thermique . . . 5
III.2. Analogie entre conduction électrique et conduction thermique . . . 6
IV. Transfert conducto-convectif . . . 7
IV.1. Loi de Newton . . . 7
IV.2. Coefficient de transfert conducto-convectif . . . 7
IV.3. Résistance thermique pour la conducto-convection . . . 8

On rappelle qu'il existe trois types de transfert thermique :

- la **conduction** qui correspond à un transfert thermique par contact sans déplacement de matière ;
- la **convection** qui correspond à un transfert thermique dû aux déplacements de particules à des températures différentes ;
- le **rayonnement** qui correspond à un transfert thermique par émission électromagnétique, puisque tout corps émet un rayonnement qui dépend de sa température.

Dans ce chapitre, nous allons caractériser le phénomène de conduction et aborder rapidement le phénomène de convection, en se limitant à des problèmes à une dimension en coordonnées cartésiennes.

I. Notion de flux thermique

I.1. Loi de Fourier

On observe expérimentalement qu'une inhomogénéité de température engendre un transfert thermique orienté de la zone chaude vers la zone froide. En 1807, Joseph Fourier proposa une loi phénoménologique qui exprime le **vecteur densité de flux thermique** lors de la conduction thermique dans un matériau présentant une inhomogénéité de température dans la direction x, c'est la **loi de Fourier** :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$$

avec λ la **conductivité thermique** du matériau qui s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, et j_{th} qui s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

En supposant que la température dans un matériau diminue avec la coordonnée x, on a alors : $\dfrac{\partial T}{\partial x} < 0$, et on obtient un vecteur densité de flux thermique orienté selon $\vec{e}_x$, il est bien orienté de la zone chaude vers la zone froide.

I.2. Flux thermique

La **puissance thermique**, aussi appelée **flux thermique**, à travers une surface S orientée est définie telle que :

$$\Phi_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

elle s'exprime en W.

Application :

On considère une tige de section carrée de côté a et de longueur L, dont la température ne dépend que de la coordonnée x en régime stationnaire telle que :

$$T(x) = A\,x^2 + B\,x + C$$



avec A, B et C des constantes.
Déterminons l'expression du flux thermique :

- entrant dans la barre par la section située en $x = 0$;
- sortant de la barre par la section située en $x = 0$;
- entrant dans la barre par la section située en $x = L$;
- sortant de la barre par la section située en $x = L$.

Le vecteur densité de flux thermique s'exprime : $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda\,(2\,A\,x + B)\,\vec{e}_x$, d'où le flux thermique :

- entrant en $x = 0$: $\Phi_{\text{th}} = \iint_{\text{section}} \vec{j}_{\text{th}}(x=0) \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = -\lambda\,B\,a^2$;
- sortant en $x = 0$: $\Phi_{\text{th}} = \iint_{\text{section}} \vec{j}_{\text{th}}(x=0) \cdot (-\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = \lambda\,B\,a^2$;
- entrant en $x = L$: $\Phi_{\text{th}} = \iint_{\text{section}} \vec{j}_{\text{th}}(x=L) \cdot (-\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = \lambda\,(2\,A\,L + B)\,a^2$;
- sortant en $x = L$: $\Phi_{\text{th}} = \iint_{\text{section}} \vec{j}_{\text{th}}(x=L) \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = -\lambda\,(2\,A\,L + B)\,a^2$.

I.3. Conductivité thermique

La conductivité thermique λ d'un matériau peut dépendre de sa température. On donne quelques ordres de grandeurs à 20°C :

- pour le cuivre : $\lambda = 390\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- pour le fer : $\lambda = 80\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- pour le verre : $\lambda = 1\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- pour la laine de roche : $\lambda = 0{,}04\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- pour l'air : $\lambda = 0{,}03\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

On qualifie habituellement un matériau de **conducteur thermique** lorsque $\lambda > 10\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, et d'**isolant thermique** lorsque $\lambda < 0{,}1\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

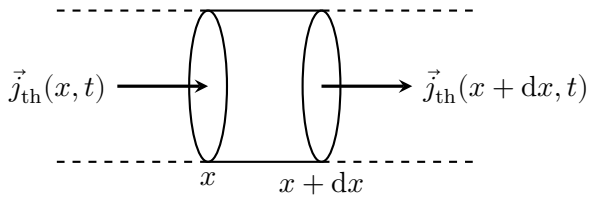
On remarque que les matériaux présentant une conductivité thermique élevée présente également une conductivité électrique élevée, et inversement.

II. Diffusion thermique

II.1. Équation de la diffusion thermique

On considère un solide homogène de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ, dont on suppose que la température $T(x,t)$ ne dépend que de la coordonnée x et du temps t.

Afin d'établir l'équation qui relie les variations spatiales et temporelles de sa température, nous allons réaliser un bilan d'enthalpie à une tranche de ce solide comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ de surface S entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.



En exprimant le vecteur densité de flux thermique de la forme $\vec{j}_{\text{th}}(x,t) = j_{\text{th}}(x,t)\,\vec{e}_x$, on peut exprimer pour cette tranche :

- le flux thermique entrant en x :

$$\Phi_{\text{th,entrant}} = \iint_{\text{S}} [j_{\text{th}}(x,t)\,\vec{e}_x] \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = j_{\text{th}}(x,t)\,S$$

- le flux thermique sortant en $x+\mathrm{d}x$:

$$\Phi_{\text{th,sortant}} = \iint_{\text{S}} [j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t)\,\vec{e}_x] \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t)\,S \approx \left[j_{\text{th}}(x,t) + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S$$

d'où on en déduit le transfert thermique reçu par cette tranche entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\delta Q = \Phi_{\text{th,entrant}}\,\mathrm{d}t - \Phi_{\text{th,sortant}}\,\mathrm{d}t = j_{\text{th}}(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - \left[j_{\text{th}}(x,t) + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$$

avec $\dfrac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = -\lambda\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ d'après la loi de Fourier, soit :

$$\delta Q = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t.$$

En considérant que cet échange d'énergie est isobare, l'application du premier principe de la thermodynamique donne :

$$\mathrm{d}H = \delta Q$$

où on peut exprimer la variation d'enthalpie de cette tranche entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}H = C\,[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)] \approx c\,\rho\,S\,\mathrm{d}x\left[T(x,t) + \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t - T(x,t)\right] = c\,\rho\,S\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$c\,\rho\,S\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$$

d'où en simplifiant :

$$c\,\rho\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

On définit le **coefficient de diffusion thermique** d'un matériau, aussi appelé **diffusivité thermique** du matériau, tel que :

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{c\,\rho}}$$

il s'exprime en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

On aboutit finalement à l'**équation de la diffusion thermique**, aussi appelé **équation de la chaleur** :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}.$$

II.2. Longueur et temps caractéristiques de la diffusion thermique

Considérons un solide de longueur caractéristique L dont la température est uniforme initialement. On le place en contact avec un thermostat qui va engendrer une variation ΔT de sa température, et on souhaite déterminer l'ordre de grandeur du temps caractéristique τ mis par la diffusion thermique pour se propager dans le solide.

L'évolution de la température du solide vérifie l'équation de la diffusion thermique, où on peut exprimer en ordre de grandeur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{\Delta T}{\tau} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta T}{L^2}$$

soit :

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim D \frac{\Delta T}{L^2}$$

d'où un temps caractéristique :

$$\tau \sim \frac{L^2}{D}.$$

On remarque que ce temps est indépendant de la variation ΔT de la température du solide.

Application :

Retrouvons l'expression de l'ordre de grandeur du temps caractéristique à l'aide d'une analyse dimensionnelle en supposant qu'il peut s'exprimer sous la forme :

$$\tau \sim L^\alpha \, D^\beta \, \Delta T^\gamma$$

avec α, β et γ des constantes à déterminer.

L'analyse dimensionnelle donne : $\dim(\tau) = \dim(L)^\alpha \dim(D)^\beta \dim(\Delta T)^\gamma$, avec :

- $\dim(\tau) = \mathrm{T}$;
- $\dim(L) = \mathrm{L}$;
- $\dim(D) = \mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}$;
- $\dim(\Delta T) =$;

soit : $\mathrm{T} = \mathrm{L}^\alpha \left(\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}\right)^{\beta\,\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha+2\,\beta}\,\mathrm{T}^{-\beta\,\gamma}$, d'où on en déduit : $\beta = -1$, $\gamma = 0$ et $\alpha = 2$.

On retrouve ainsi l'expression : $\tau \sim \dfrac{L^2}{D}$.

II.3. Irréversibilité de la diffusion thermique

En physique, l'évolution d'un système est qualifiée de **réversible** si l'équation différentielle qui le caractérise reste inchangée par renversement temporel, c'est-à-dire en réalisant le changement de variable $t \to t' = -t$.

Prenons l'exemple d'un oscillateur harmonique dont l'équation différentielle est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, x = 0.$$

Le renversement temporel donne :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t'^2}$$

on retrouve alors la même équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t'^2} + \omega_0^2\, x = 0$$

il s'agit donc d'une évolution réversible.

Application :

Montrons que le phénomène de diffusion thermique est irréversible.
Pour l'équation de la diffusion thermique, l'application du renversement temporel donne : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial T}{\partial t'}$, on obtient alors une équation différentielle différente : $-\dfrac{\partial T}{\partial t'} = D\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, le phénomène de diffusion thermique est donc irréversible.

III. Cas particulier du régime stationnaire

III.1. Loi d'Ohm thermique

Considérons un solide dont la température $T(x,t)$ vérifie l'équation de la diffusion thermique. Lorsqu'un régime stationnaire est atteint, sa température ne dépend plus du temps, et l'équation de la diffusion thermique donne :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

comme $T(x)$ est alors une fonction qui ne dépend plus que d'une seule variable.

Application :

On considère un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ, dont la température passe de T_1 sur sa paroi en $x = 0$ à T_2 sur sa paroi en $x = e$ (avec $T_1 > T_2$).
Exprimons le profil de température $T(x)$ à l'intérieur du mur en régime stationnaire, puis le flux thermique $\Phi_{\text{th}}(x)$ qui traverse le mur dans le sens des x croissants.

En intégrant deux fois l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, on en déduit que le profil de température s'exprime de la forme : $T(x) = A\,x + B$, avec A et B des constantes que l'on détermine à l'aide des conditions aux limites :

- $T(0) = T_1 = B$;
- $T(e) = T_2 = A\,e + B$, d'où : $A = \dfrac{T_2 - T_1}{e}$;

soit finalement : $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{e}\,x + T_1$.

Le flux thermique s'exprime : $\Phi_{\text{th}}(x) = \displaystyle\iint_S \vec{j}_{\text{th}}(x)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = -\lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,S = -\lambda\,\frac{T_2 - T_1}{e}\,S$,

il est constant et positif.

En régime stationnaire, on définit la **résistance thermique d'un mur** d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ telle que :

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda\, S}}$$

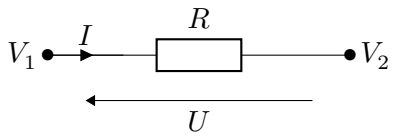
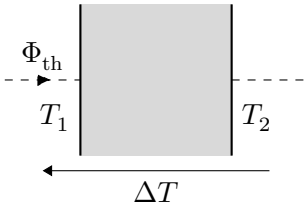
elle s'exprime en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Nous venons de montrer que la différence de température ΔT entre les deux parois d'un mur est reliée au flux thermique Φ_{th} qui le traverse à l'aide de la **loi d'Ohm thermique** :

$$\boxed{\Delta T = R_{\text{th}}\, \Phi_{\text{th}}}.$$

III.2. Analogie entre conduction électrique et conduction thermique

On peut réaliser une analogie entre les lois de la conduction électrique et les lois de la conduction thermique en régime stationnaire.

Conduction électrique	**Conduction thermique**
	
Résistance électrique R	Résistance thermique R_{th}
Intensité électrique $I = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ avec $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courants (que l'on définira en électromagnétisme)	Flux thermique $\Phi_{\text{th}} = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ avec $\vec{j}$ le vecteur densité de flux thermique
Différence de potentiel électrique $U = \Delta V = V_1 - V_2$	Différence de température $\Delta T = T_1 - T_2$
Loi d'Ohm $U = R\, I$	Loi d'Ohm thermique $\Delta T = R_{\text{th}}\, \Phi_{\text{th}}$

L'analogie permet également de retrouver les mêmes lois d'associations de résistances qu'en électricité.

- Deux résistances thermiques $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$ sont en **série** si elles sont traversées par le même flux thermique et soumises à des différences de température différentes, elles sont alors équivalentes une résistance équivalente $R_{\text{th,éq}}$ telle que :

$$R_{\text{th,éq}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}.$$

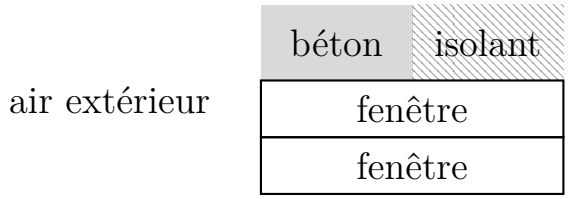
- Deux résistances thermiques $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$ sont en **parallèle** si elles sont traversées par des flux thermiques différents et soumises à une même différence de température, elles sont alors équivalentes une résistance équivalente $R_{\text{th,éq}}$ telle que :

$$\frac{1}{R_{\text{th,éq}}} = \frac{1}{R_{\text{th},1}} + \frac{1}{R_{\text{th},2}}.$$

Application :

Calculons la résistance thermique équivalente $R_{\text{th,éq}}$ à une façade de maison constituée d'un mur en béton de résistance thermique $R_{\text{th},1} = 2.10^{-3}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$, sur lequel est déposé une couche d'isolant en laine de verre de résistance thermique $R_{\text{th},2} = 8.10^{-3}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$, et présentant deux fenêtres de résistance thermique $R_{\text{th},3} = 8.10^{-2}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ chacune.

Le mur en béton et la couche d'isolant sont en série, et l'ensemble est en parallèle avec les deux fenêtres :



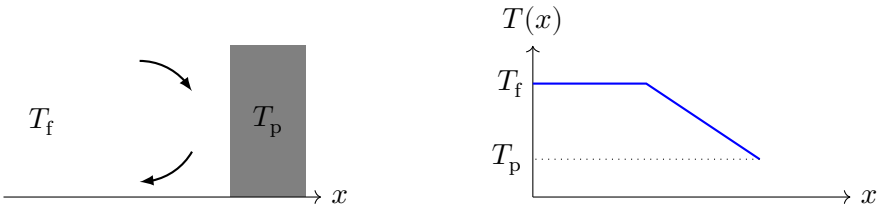
La résistance thermique équivalente à la façade peut s'exprimer telle que : $\dfrac{1}{R_{\text{th,éq}}} = \dfrac{1}{R_{\text{th},1}+R_{\text{th},2}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},3}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},3}} = \dfrac{1}{R_{\text{th},1}+R_{\text{th},2}} + \dfrac{2}{R_{\text{th},3}}$, d'où :

$$R_{\text{th,éq}} = \frac{\left(R_{\text{th},1}+R_{\text{th},2}\right)R_{\text{th},3}}{2\,R_{\text{th},1}+2\,R_{\text{th},2}+R_{\text{th},3}} = 8.10^{-3}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}.$$

IV. Transfert conducto-convectif

IV.1. Loi de Newton

Considérons un fluide à la température T_f qui circule à proximité d'une paroi solide à la température T_p et de surface S (avec $T_\text{f} > T_\text{p}$). Le transfert thermique au niveau de la paroi a pour origine la conduction, mais également la convection comme le fluide est en mouvement, on parle alors de **transfert conducto-convectif**.



Si on mesure expérimentalement la température $T(x)$ du fluide en s'approchant de la paroi, on observe que celle-ci diminue de façon quasi-linéaire de T_f jusqu'à T_p. Comme cette évolution est semblable à celle obtenue précédemment lors de l'étude de la conduction thermique en régime stationnaire, on peut alors modéliser les transferts conducto-convectifs comme de la conduction.

Le flux thermique reçu par le solide de la part du fluide peut alors s'exprimer à l'aide de la **loi de Newton** :

$$\boxed{\Phi_\text{th} = h\,S\left(T_\text{f} - T_\text{p}\right)}$$

avec h le **coefficient de transfert conducto-convectif** qui s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

IV.2. Coefficient de transfert conducto-convectif

Le coefficient de transfert conducto-convectif dépend de nombreux paramètres, tels que la nature du fluide, sa vitesse ou la rugosité de la paroi.

On donne quelques ordres de grandeurs :

- pour un gaz en convection naturelle à proximité d'un solide : $h \sim 10\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$;
- pour un liquide en convection naturelle à proximité d'un solide : $h \sim 10^2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$;
- pour un liquide en écoulement forcé à proximité d'un solide : $h \sim 10^3\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

IV.3. Résistance thermique pour la conducto-convection

La loi de Newton permet de retrouver la loi d'Ohm thermique :

$$T_\mathrm{f} - T_\mathrm{p} = \frac{1}{h\,S}\,\Phi_\mathrm{th}$$

en définissant la **résistance thermique d'une interface** entre deux milieux telle que :

$$\boxed{R_\mathrm{th} = \frac{1}{h\,S}}.$$

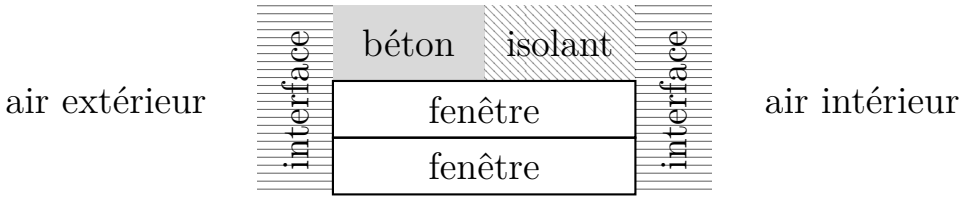
Application :

Reprenons l'application précédente avec une façade de maison de résistance thermique équivalente $R_{\mathrm{th,éq}}$. On souhaite prendre également en compte les transferts conducto-convectifs :

- à l'interface entre la façade et l'air à l'extérieur de la maison, que l'on modélise par un coefficient de transfert conducto-convectif $h_\mathrm{ext} = 1.10^2\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$;
- à l'interface entre la façade et l'air à l'intérieur de la maison, que l'on modélise par un coefficient de transfert conducto-convectif $h_\mathrm{int} = 2.10^1\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

Calculons la nouvelle résistance thermique équivalente $R'_{\mathrm{th,éq}}$ pour cette façade de surface $S = 20\,\mathrm{m^2}$.

Les résistances thermiques aux interfaces sont en série avec la résistance équivalente de la façade :



La nouvelle résistance thermique équivalente pour cette façade est donc : $R'_{\mathrm{th,éq}} = \dfrac{1}{h_\mathrm{ext}\,S} + R_{\mathrm{th,éq}} + \dfrac{1}{h_\mathrm{int}\,S} = 11.10^{-3}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.